Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 01.09.2014.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ realnih polinoma stepena ≤ 4 dat je skup

$$\mathcal{M} = \{p \in \mathcal{P}_4 \,|\, p'(0) = p(1),\, p''(0) = 2p(-1)\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{M}$ vektorski potprostor prostora $\mathcal{P}_4$, odredite mu jednu bazu i dimenziju, te jedan direktni komplement.

2. Neka je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T : \mathcal{V}^2(0) \to \mathcal{V}^2(0)$ u kanonskoj bazi $\left\{ \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Odrediti matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j}\}$. Da li postoji vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}^2(0)$ takav da je $T(\vec{v}) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$?

3. (20%)(a) Objasniti šta će se desiti kada se Gram-Schmidtov proces primjeni na linearno zavisan skup vektora.

(80%)(b)Zadan je unitarni prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

4. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2.

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

(#) U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ realnih polinoma stepena ≤ 4 dat je skup

$$M = \{ p \in \mathcal{P}_4 \mid p'(0) = p(1),\ p''(0) = 2p(-1) \}.$$

Dokažite da je M vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$, odredite mu jednu bazu i dimenziju, te jedan direktni komplement.

Rj.

Prisjetimo se definicije vektorskog potprostora i potrebnog i dovoljnog uslova da bi neki skup bio vektorski potprostor:

Za neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora V nad $\mathbb{F}$ kažemo da je vektorski potprostor od V nad $\mathbb{F}$ akko je $\mathcal{S}$ također vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ u odnosu na iste operacije vektorskog sabiranja i skalarnog množenja. Da bi neprazan skup $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subseteq V$) bio vektorski potprostor prostora V potrebno je i dovoljno da vrijedi (A1) i (M1):

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

Pa pokažimo da vrijedi (A1). Izaberimo proizvoljna dva polinoma $p, q \in M$ i pokažimo da za njih vrijedi $p + q \in M$

$$\left.\begin{aligned}(p+q)'(0) &= (p'+q')(0) = p'(0) + q'(0) \overset{p \in M,\, q \in M}{=} p(1) + q(1) = (p+q)(1)\\ (p+q)''(0) &= (p''+q'')(0) = p''(0) + q''(0) \overset{p \in M,\, q \in M}{=} 2p(-1) + 2q(-1) = 2(p+q)(-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{vrijedi (A1)}$$

Pokažimo da vrijedi (M1) - izaberimo proizvoljni polinom $p \in M$ i pokažimo da je $\alpha p \in M$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned}(\alpha p)'(0) &= \alpha p'(0) \overset{p \in M}{=} \alpha p(1) = (\alpha p)(1)\\ (\alpha p)''(0) &= \alpha p''(0) \overset{p \in M}{=} \alpha \cdot 2p(-1) = 2(\alpha p)(-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{vrijedi (M1)}$$

M jest vektorski potprostor prostora $\mathcal{P}_4$.

Sljedeće što želimo je da skup M prikažemo na drugačiji način..

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $\quad \underline{p(1) = a+b+c+d+e}$, $\quad p(-1) = a-b+c-d+e$

$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $\quad \underline{p'(0) = d}$ $\quad\quad 2p(-1) = \underline{2a-2b+2c-2d+2e}$

$p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, $\quad \underline{p''(0) = 2c}$

Ako je $p \in M$ tada $p'(0) = p(1)$ i $p''(0) = 2p(-1)$ tj:

$$a+b+c+e=0$$
$$a-b-d+e=0$$

Prema tome imamo

$$M = \left\{ ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ 5 nepoznatih, rang 2

tri promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$, $e=u$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s - u \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ t \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad s, t, u \in \mathbb{R}$$

<u>Baza</u>

<u>Linearno nezavisan skup koji generira vektorski prostor V nazivamo baza prostora V.</u>

Time smo dobili

$$M = \left\{ \left(-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}s - u\right)x^4 + \left(-\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}s\right)x^3 + tx^2 + sx + u \;\middle|\; t, s, u \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{ -\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + x^2,\; \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + x,\; -x^4 + 1 \right\}$$

Prema tome baza vektorskog prostora $\mathcal{M}$ je

$$\left\{-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2,\ \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3+x,\ -x^4+1\right\}$$

Dimenzija

Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je definisana sa

$\dim \mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od $\mathcal{V}$
= broj vektora u najmanjem skupu koji generiše $\mathcal{V}$
= broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu iz $\mathcal{V}$

Dimenzija prostora $\mathcal{M}$ je 3.
Primjetimo da je i

$$\mathcal{M}=\operatorname{span}\{-x^4-x^3+2x^2,\ x^4-x^3+2x,\ -x^4+1\}$$

Direktni komplement

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni potprostori akko je $\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\mathbf{0}$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$.

Pa proširimo bazu od $\mathcal{M}$ do baze za $\mathcal{P}_4$

$$\begin{bmatrix}-1&1&-1&1&0&0&0&0\\-1&-1&0&0&1&0&0&0\\2&0&0&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\ldots\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1/2&0&0\\0&1&0&0&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1/2&-1/2&1\\0&0&0&0&1&1/2&1/2&0\end{bmatrix}$$

Direktni komplement od $\mathcal{M}$ je

$$\mathcal{N}=\operatorname{span}\{x^4,\ x^3\}$$

(#) Neka je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T: V^2(O) \to V^2(O)$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i} = \binom{1}{0}, \vec{j} = \binom{0}{1}\}$. Odrediti matricu operatora T u bazi $\{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$. Da li postoji vektor $\vec{v} \in V^2(O)$ takav da je $T(\vec{v}) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$?

Rj.

Prisjetimo se sljedeće teoreme

Promjena matrice koordinata

Neka je A linearni operator na V, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V. Koordinate matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezani na sljedeći način

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'} P, \quad \text{gdje je} \quad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$. Ekvivalentno

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}} Q, \quad \text{gdje je} \quad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$.

Označimo sa φ i φ' sljedeće dvije baze $\varphi = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\varphi' = \{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$.
Iz postavke zadatka nam je dato $[T]_{\varphi}$ tj.

$$[T]_{\varphi} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ono što trebamo odrediti je $[T]_{\varphi'}$. Prema teoremi iznad

$$[T]_{\varphi'} = Q^{-1}[T]_{\varphi} Q \quad \text{gdje je} \quad Q = [I]_{\varphi'\varphi}.$$

$$[I]_{\varphi'\varphi} = \begin{pmatrix} | & | \\ [\vec{i}+2\vec{j}]_{\varphi} & [\vec{i}+3\vec{j}]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[Q \,|\, I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Prema tome matrica operatora T u bazi $\varphi' = \{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$ je

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prisjetimo se

<u>Djelovanje operatora kao množenje matricom</u>

<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svaki $u \in \mathcal{U}$ djelovanje od T na u je dato sa</u>

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}}$$

Prema postavci zadatka mi tražimo vektor $\vec{v}$ za koji vrijedi $[T(\vec{v})]_{\varphi} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Prema teoremi iznad znamo $[T(\vec{v})]_{\varphi} = [T]_{\varphi'\varphi}[\vec{v}]_{\varphi'}$.

$$[T]_{\varphi'\varphi} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{i}+2\vec{j})]_{\varphi} & [T(\vec{i}+3\vec{j})]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Kako je

$$[T]_{\varphi} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{i})]_{\varphi} & [T(\vec{j})]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ to je}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+y) + (x+4y) = 3x+5y$$

Time traženi vektor $\vec{v}$ za koji vrijedi $T(\vec{v}) = 3\vec{i}+5\vec{j}$ je $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}$.

Objasniti šta će se desiti kada se Gram-Schmidtov proces primjeni na linearno zavisan skup vektora.

Rj.

Gram-Schmidt-ov proces ortogonalizacije

Ako je $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ baza za unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada Gram-Schmidt-ov niz definisan sa

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad i \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i \|} \quad \text{za } k = 2, \dots, n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$.

Algoritam će pasti na prvom vektoru za koji vrijedi

$$x_k \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$$

zato što, ako $x_k \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ tada će Furijer-ov razvoj od x_k u odnosu na $\operatorname{span}\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ biti $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

pa, prema tome

$$u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\| x_k - \sum \langle u_i, x_k \rangle u_i \|} = \frac{0}{\|0\|}$$

nije definisano.

Zadan je unitarni prostor $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) produktom $<A,B> = trag(A^T B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Rj. Da bi odredili ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$ koristimo Gram-Schmidtov proces ortonormalizacije.

<u>Klasični Gram-Schmidtov algoritam</u>

<u>Za $k=1$:</u> $\quad u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

<u>Za $k>1$:</u> $\quad u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} <u_i, x_k> u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju imamo $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$U_1 \leftarrow \frac{X_1}{\|X_1\|}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - <U_1, X_2> U_1$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{\|U_2\|} \cdot U_2$$

$$U_3 \leftarrow X_3 - <U_1, X_3> U_1 - <U_2, X_3> U_2$$

$$U_3 \leftarrow \frac{1}{\|U_3\|} U_3$$

$$\|X_1\|^2 = \langle X_1, X_1 \rangle = \operatorname{trag}(X_1^T X_1) = \operatorname{trag}\left(\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\right) = 9+18 = 27$$

$$\|X_1\| = \sqrt{27} = \sqrt{3\cdot 9} = 3\sqrt{3}$$

$$U_1 \leftarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_2 \rangle = \operatorname{trag}(U_1^T X_2) = \operatorname{trag}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(6+0) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\langle U_1, X_2 \rangle U_1 = \frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\|U_2\|^2 = \operatorname{trag}\left(4\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right) = 4(5+4) = 36 \Rightarrow \|U_2\| = 6$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{6}\cdot 2\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_3 \rangle = \operatorname{trag}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle U_2, X_3 \rangle = \operatorname{trag}\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}(-1-2) = -1$$

$$\langle U_1, X_3 \rangle U_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\langle U_2, X_3 \rangle U_2 = (-1)\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$U_3 \leftarrow \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ldots$ Ortonormirana baza za $\mathcal{L}$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

(#) Data je matrica

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2.

Rj.

Znamo da <u>matrica A je singularna ako joj je determinanta jednaka 0.</u>

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{razvoj po trećoj vrsti}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} \underset{II_v - III_v}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -1-b & 0 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & -1-b \end{vmatrix} = -1-b \Rightarrow \quad -1-b=0$$

$$b=-1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Višestrukost</u>

<u>Neka je $\sigma(A)$ skup svih (različitih) svojstvenih vrijednosti matrice A, i neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Algebarska višestrukost od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma matrice A. Geometrijska višestrukost od λ je $\dim \ker(A-\lambda I)$.</u>

Znamo da

<u>$\lambda \in \sigma(A) \iff A-\lambda I$ singularna $\iff \det(A-\lambda I)=0$</u>

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-1)(\lambda^3-\lambda^2-\lambda a$$

$$= (\lambda-1)\lambda(\lambda^2-\lambda-a).$$

Odavde vidimo da su dvije svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=0$. Kako sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2 to je $a=0$.

$$\lambda^2-\lambda-a \overset{a=0}{=} \lambda^2-\lambda = \lambda(\lambda-1)$$

Vrijednosti parametara a i b su

$$a=0, \qquad b=-1.$$